

Treballs destacats de matemàtiques

Resum de tesis doctorals de les universitats catalanes

AUTOR: TEO KUKULJAN

Tesi doctoral: *Regularitat de les fronteres lliures en problemes de l'obstacle*, dirigida per Xavier Ros Oton, llegida el dia 7 d'octubre del 2022, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. ()

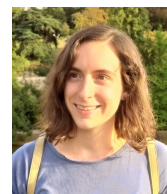


La tesi doctoral de Teo Kukuljan se centra en l'àrea de les equacions en derivades parcials (EDP), i més concretament en l'estudi de problemes de frontera lliure. Es tracta de problemes d'EDP on hi ha també una superfície (a priori desconeguda, i que anomenem frontera lliure) que separa dues regions diferents, i apareixen en contextos ben diferents, principalment en models físics (p. e. en transicions de fase), però també en biologia, finances, o en problemes purament matemàtics en geometria o probabilitat. Des del punt de vista matemàtic, la pregunta principal és què en podem dir de la regularitat d'aquesta frontera lliure: podria ser molt irregular amb perímetre infinit? O és simplement una superfície C^∞ ? El primer gran resultat en aquest camp de recerca va ser obtingut per Caffarelli el 1977, quan va

demostrar que la frontera lliure és C^1 llevat d'un cert conjunt tancat de punts singulars. El mateix any, Kinderlehrer i Nirenberg van demostrar que, si localment la frontera lliure és C^1 , aleshores és C^∞ . Aquests treballs van obrir la porta a una àrea de recerca que continua ben activa. De fet, al llarg dels últims anys, hi ha hagut un gran interès per entendre problemes de frontera lliure no-locales, és a dir, quan l'operador laplacià (definit a partir de derivades segones) és substituït pel aplacià fraccionari (un operador integrodiferencial). Un dels resultats principals d'aquesta tesi doctoral és l'estudi de la regularitat per a aquest tipus de problemes, i més concretament la generalització del resultat de Kinderlehrer i Nirenberg en aquest context.

CLARA CUFÍ CABRÉ

Tesi doctoral: *Contribucions a l'estudi d'òrbites periòdiques i varietats invariants en sistemes dinàmics*, dirigida per Ernest Fontich i Jaume Llibre, llegida el dia 16 de febrer del 2023, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. (clara.cufi@uab.cat)



Aquesta tesi tracta l'estudi de varietats invariants i òrbites periòdiques de sistemes dinàmics discrets i continus.

En els capítols 2 i 3 estudiem l'existència i la regularitat de corbes invariants d'aplicacions al pla amb un punt fix parabòlic amb part nilpotent utilitzant el mètode de la parametrització.

En el cas analític, demostrem l'existència d'una corba invariant analítica imposant certes condicions en els coeficients dels termes no lineals de l'aplicació. En el cas diferenciable, demostrem que si la regularitat de l'aplicació és més gran que un cert valor, aleshores existeix una corba invariant de la mateixa regularitat,

fora del punt fix. En el capítol 4 considerem un problema anàleg per a camps vectorials al pla, i obtenim resultats d'existència de corbes invariants utilitzant el fet que, en condicions adequades, les varietats invariants d'un camp vectorial coincideixen amb les varietats invariants del seu flux a temps t .

En els capítols 5 i 6 considerem aplicacions i camps vectorials que tenen un tor invariant parabòlic de dimensió d amb part nilpotent. En aquest context, donem condicions sobre els coeficients dels termes no lineals de l'aplicació (resp. camp vectorial) pels quals el tor té varietats invariants estables i inestables. També considerem el mateix problema per a camps vectorials no autònoms que depenen quasiperiòdicament del temps, i presentem algunes aplicacions dels resultats obtinguts. Els resultats d'existència de varietats invariants s'obtenen en dos passos: en el primer pas presentem un algorisme per calcular una aproximació d'una parametrització de la varietat invariant; en el

segon pas, presentem un resultat a posteriori, que assegura que existeix una varietat invariant veritable propera a aquesta aproximació.

Al capítol 8 utilitzem els nombres de Lefschetz i la funció zeta de Lefschetz per obtenir informació sobre el conjunt de períodes d'alguns difeomorfismes en varietats compactes. Considerem la família de difeomorfismes de Morse-Smale definits a l'esfera n -dimensional, als productes de dues esferes de dimensió arbitrària, a l'espai projectiu complex n -dimensional i a l'espai projectiu de quaternions n -dimensional. A continuació, descrivim el conjunt minimal de períodes de Lefschetz per a aquests difeomorfismes de Morse-Smale, que és un subconjunt del conjunt de períodes que es conserven sota l'equivalència d'homotopia. Finalment, al capítol 9 mostrem que els camps vectorials lineals definits en algunes varietats diferents de \mathbb{R}^n poden tenir cicles límit i considerem la qüestió de quants cicles límit poden tenir com a màxim.

GUILLERMO APARICIO-ESTREMS

Tesi doctoral: *Optimització de mètrica de malles d'alt ordre per adaptivitat corba*, dirigida per Xevi Roca i Abel Gargallo-Peiró, llegida el dia 26 d'abril del 2023, en el programa de doctorat en Matemàtica Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya. (guillermo.aparicio@upc.edu)



Per tal de preservar la fidelitat d'una simulació on la solució presenta característiques corbes pronunciades, la comunitat de mètodes d'alt ordre ha començat a corbar no només la vora sinó també l'interior de malles d'alt ordre no estructurades [1, 2, 3, 4]. Algunes d'aquestes tècniques contribueixen a l'adaptabilitat corba d'alt ordre basada en estimadors de l'error. Els estimadors de l'error determinen una mètrica discreta que s'utilitza per modificar la malla corba d'alt ordre. Desafortunadament, tot i que tots aquests mètodes han de modificar les coordenades de la malla, no hi ha cap mètode que consideri l'optimització de mètrica de malles corbes d'alt ordre per a un grau polinòmic elevat. A més, els mètodes existents no forcen mesures Riemannianes unitàries per a totes les entitats de la malla ni dissenyen un optimitzador específic del problema per a característiques corbes pronunciades.

Per abordar aquests problemes, aquesta tesi pretén mostrar l'optimització, d'acord amb una mètrica, de malles d'alt ordre en geometria corba amb les coordenades com a variables de disseny. Per aquest motiu, es proposen les següents contribucions. Primer, per tal de verificar i optimitzar la desviació d'escorçament i alineament entre una malla i una mètrica analítica, definim una mesura diferenciable de distorsió de forma per a malles corbes d'alt ordre [5]. Segon, per forçar mesures Riemannianes unitàries de les entitats de la malla, definim una mesura diferenciable de distorsió de mida-forma per a malles corbes d'alt ordre. Tercer, per tal de minimitzar eficientment, amb toleràncies estrictes, una mesura de distorsió que varia punt a punt, dissenyem un optimitzador específic. Quart, per tal d'aplicar el mètode de Newton a la minimització de la distorsió en malles amb mètrica discreta, derivem fins a segon ordre una interpolació mètrica d'alt ordre [6]. Finalment, perquè les vores corbes estiguin

simultàniament satisfetes, derivem fins a segon ordre les derivades d'una representació CAD [7].

En conclusió, aquesta tesi mostra l'optimització de malles d'alt ordre d'acord amb una mètrica i en geometria corba. Les novetats contribuiran a l'adaptabilitat corba d'alt ordre basada en estimadors de l'error, i per tant ajudaran a millorar la precisió de les simulacions per a solucions que presentin característiques corbes pronunciades.

Referències

- [1] M. J. Zahr, A. Shi, P-O. Persson. Implicit shock tracking using an optimization-based high-order discontinuous Galerkin method. *Journal of Computational Physics*, 2020.
- [2] J. Marcon, M. Turner, D. Moxey, S. J. Sherwin, J. Peiró. A variational approach to high-order r-adaptation. In *26th International Meshing Roundtable*, 2017.
- [3] D. P. Sanjaya, K. J. Fidkowski Improving high-order finite element approximation

through geometrical warping. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 2016.

- [4] V. Dobrev, P. Knupp, T. Kolev, K. Mittal, V. Tomov. The target-matrix optimization paradigm for high-order meshes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2019.
- [5] G. Aparicio-Estrens, A. Gargallo-Peiró, X. Roca. Defining a Stretching and Alignment Aware Quality Measure for Linear and Curved 2D Meshes. In *27th International Meshing Roundtable* p. 37-55. Springer, 2019.
- [6] G. Aparicio-Estrens, A. Gargallo-Peiró, X. Roca. High-order metric interpolation for curved r-adaption by distortion minimization. *Proceedings of the 2022 SIAM International Meshing Roundtable* p. 1-12. Zenodo, 2022.
- [7] G. Aparicio-Estrens, A. Gargallo-Peiró, X. Roca. Combining High-Order Metric Interpolation and Geometry Implicitization for Curved r-Adaption. *Computer-Aided Design*, 2023.

DAN A. PARASCHIV

Tesi doctoral: *Sobre la connectivitat de les components de Fatou d'algunes famílies de funcions racionals*, dirigida per Jordi Canela i Xavier Jarque, llegida el dia 16 de juny del 2023, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. (alexparaschiv09@yahoo.com)



La iteració racional és l'estudi del comportament asimptòtic de les seqüències donades pels iterats d'una funció racional sobre l'esfera de Riemann. Segons la teoria de Montel sobre famílies normals, l'espai de fases (també anomenat pla dinàmic) es divideix en dos conjunts totalment invariants coneguts com a conjunt de Fatou (unió d'oberts on la dinàmica és essencialment senzilla i per la que tenim un teorema de classificació) i el seu complementari, el conjunt de Julia (un conjunt tancat on la dinàmica és caòtica). Així la dinàmica holomorfa és l'estudi de les propietats topològiques, geomètriques i/o analítiques dels conjunts esmentats i la dinàmica subjacent. El tema principal d'aquesta tesi és l'estudi de la connectivitat de les components de Fatou per a determinades famílies de funcions racionals (estem doncs en el cas de propietats topològiques). La tesi té dos

capítols (a més a més de la introducció i dels preliminars).

En el capítol 3 es considera una família de pertorbacions singulars (és a dir famílies que tenen paràmetre(s) on el grau de l'aplicació cau significativament) que generalitzen una família singular amb productes de Blaschke. En general, quan parlem de pertorbacions singulars el que tenim és que pel paràmetre(s) *singular* tenim un coneixement alt de les propietats dinàmiques i el que volem és usar aquesta informació per donar informació del pla dinàmic per valors del paràmetre propers al paràmetre singular. De fet, aquest és un tipus de problema molt comú en sistemes dinàmics (teoria KAM, per exemple). El resultat principal d'aquest capítol és mostrar que els plans dinàmics d'aquestes funcions pertorbades presenten components de Fatou de connectivitat arbitràriament gran i

a més a més, determinar exactament aquestes connectivitats.

En el capítol 4 es consideren sistemes dinàmics holomorfs (racionals) que provenen d'algorismes de recerca d'arrel. Més precisament s'estudien els mètodes Chebyshev-Halley aplicats a una família simètrica de polinomis de grau arbitrari; concretament $p_n(z) = z^n - 1$. L'objectiu principal és mostrar l'existència

de paràmetres de manera que les conques d'atracció immediates corresponents a les arrels de la unitat tinguin connectivitat infinita. A més, també es demostra que el pla dinàmic corresponent conté una component connexa (no acotada) del conjunt de Julia, que és una deformació quasiconforme del conjunt de Julia de la funció obtinguda aplicant el mètode de Newton al polinomi p_n . Per aquest fi es fa servir la cirurgia quasiconforme.

NIMESH RAMESH CHAHARE

Tesi doctoral: *Mecànica del teixit epitelial sotmès a pressió controlada*, dirigida per Marino Arroyo i Xavier Trepal, llegida el dia 20 de juny del 2023, en el programa de doctorat en Matemàtica Aplicada de la UPC. (chaharenimesh@gmail.com)

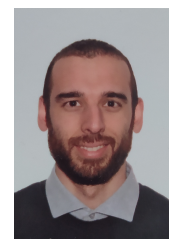


Les làmines epitelials formen estructures 3D especialitzades adequades als seus rols fisiològics, com ara alvèols ramificats als pulmons, tubs al ronyó i vellositats a l'intestí. Per generar i mantenir aquestes estructures, els epitelis han de patir deformacions 3D complexes en longitud i temps. La manera en què la forma epitelial sorgeix de tensions actives, viscoelasticitat i pressió luminal encara és poc entesa. Per abordar aquesta qüestió, hem desenvolupat un xip microfluídic i un marc computacional per dissenyar teixits epitelials 3D amb forma i pressió controlades. En aquest sistema, una monocapa epitelial es cultiva sobre una superfície porosa amb zones circulars de baixa adhesió. En aplicar pressió hidroestàtica, la monocapa es delamina i forma una estructura esfèrica a la zona circular. Aquesta forma simple ens permet calcular la tensió epitelial utilitzant

la llei de Laplace. A través d'aquest enfocament, sotmetem la monocapa a una gamma de pressions luminals a diferents velocitats i, per tant, sondegem la relació entre deformació i tensió en diferents règims mentre seguim computacionalment la dinàmica de l'actina i el seu efecte mecànic a escala de teixit. Canvis de pressió lents en relació amb la dinàmica de l'actina permeten que el teixit acomodi grans variacions de deformació. No obstant això, sota reduccions sobtades de pressió, el teixit desenvolupa patrons de vinclament i plecs amb diferents graus de trencament de simetria per emmagatzemar l'àrea de teixit sobrant. Aquestes idees ens permeten modelar plecs epitelials a través d'uns plegaments dirigits racionalment. El nostre estudi estableix una nova estratègia per dissenyar esdeveniments morfogènics epitelials.

ALBERT JIMÉNEZ RAMOS

Tesi doctoral: *Distribucions nodals en el símplex d'altres dimensions per interpolació i integració d'alt ordre*, dirigida per Xevi Roca i Abel Gargallo-Peiró, llegida el dia 28 de juny del 2023, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya. (albert.jimenez@bsc.es)



Per tal de simular fenòmens no estacionaris en geometria complexa en moviment, els científics i enginyers computacionals s'han interessat en discretitzacions de l'espai-temps no estructurades. Aquestes discretitzacions de l'espai-temps tenen com a objectiu resoldre alguns problemes dels mètodes estàndards d'integració temporal

per passes considerant una única malla que discretitzi la geometria espai-temps estacionària descrita per la geometria espacial en moviment. Desafortunadament, aquestes discretitzacions no s'han adoptat de forma extensa per simulacions no estacionàries d'alta fidelitat en 3D perquè moltes capacitats fonamentals

relacionades amb l'aproximació d'alt ordre de la geometria i de la solució no han estat encara desenvolupades en 4D. Aquestes capacitats inclouen dur a terme interpolació i integració numèrica d'alt ordre en geometria espai-temps complexa.

Per tal de resoldre aquests problemes, aquesta tesi té com a objectiu demostrar l'optimització de distribucions nodals en el símplex d'altres dimensions per interpolació i integració factible amb les coordenades dels punts com a variables de disseny. Amb aquesta finalitat, aquesta tesi proposa les següents contribucions. Primer, per interpolat un model de subdivisió corb obtingut a partir d'una malla lineal de triangles, ideem un mètode de representació de geometria fent servir distribucions de punts equiespaiats. Segon, per addicionalment preservar la intenció de simulació, ideem un mètode de modelatge nodal. Tercer, per estimar l'error d'interpolació d'una distribució nodal, proposem un mètode de refinament de punts. Quart, per explorar les distribucions nodals que, de manera heurística,

són els millors mínims locals d'una aproximació de l'error d'interpolació, proposem un mètode d'optimització de finalitat específica. Cinquè, per minimitzar l'error d'interpolació d'una distribució de nodes, proposem un mètode d'optimització amb restriccions. Finalment, per forçar errors d'interpolació petits i integració exacta, proposem un mètode d'optimització amb restriccions.

En conclusió, aquesta tesi demostra l'optimització de distribucions nodals tenint en compte la interpolació en el símplex d'altres dimensions per interpolació i integració factible. Amb aquesta finalitat, aquesta tesi proposa nous mètodes nodals per modelar i representar la intenció de simulació i per explorar i optimitzar distribucions de nodes. Aquestes novetats contribuiran a dur a terme interpolació i integració numèrica d'alt ordre en geometria complexa en 4D. Així, ajudaran a explotar els beneficis de la simulació espai-temps 4D d'alta fidelitat per geometries complexes 3D en moviment.

IÑIGO U. ERNETA

Tesi doctoral: *Problemes el·líptics: regularitat de solucions estables i una teoria no local de camps extrems de Weierstrass*, dirigida per Xavier Cabré, llegida el dia 4 de juliol del 2023, en el programa de doctorat en Matemàtica Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya. (inigo.urtiaga@upc.edu)



Aquesta tesi doctoral tracta qüestions qualitatives de la teoria d'equacions en derivades parcials (EDPs) el·líptiques i d'equacions integro-diferencials. L'objecte del nostre interès és una classe distingida de solucions, satisfent condicions de minimalitat adequades, que corresponen als "observables" de la natura.

La primera part de la tesi desenvolupa una teoria de la regularitat per a *solucions estables* de problemes semilineals amb coeficients variables. Aquí, amb solució estable ens referim al fet que el primer valor propi de l'equació linealitzada sigui positiu o zero. Per a problemes variacionals, això equival que la segona variació del funcional d'energia associat no sigui mai negativa, una condició necessària (però no suficient) perquè la solució sigui un mínim.

El nostre resultat principal mostra que les solucions estables en dominis de classe $C^{1,1}$ són fitades en el rang òptim de dimensions $n \leq 9$. Aquest resultat és nou fins i tot per al

laplaciana, per al qual es necessitava una hipòtesi de regularitat C^3 sobre el domini.

La segona part de la tesi proporciona condicions suficients naturals, en un marc no local general, perquè els punts crítics (és a dir, les solucions) siguin mínims. Concretament, construïm una *calibració* per a funcionals d'energia no locals, sota la hipòtesi que el punt crític estigui incrustat en una família de sub i supersolucions tals que les seves gràfiques produeixin una foliació. Com a conseqüència, deduïm que la solució és un mínim respecte a competidors prenent valors a la regió foliada.

El nostre resultat amplia, per primera vegada, la teoria clàssica de camps extrems de Weierstrass en el Càlcul de Variacions a un context no local. Trobar una calibració per al funcional fraccionari més bàsic, la seminorma de Gagliardo, era un important problema obert que hem resolt.